آموزشی

میلاد ضیایی
اسماعیل ابراهیمی

قبولی شانسی و مهندسی شانس!

برای اخذ یک مدرک، آزمونی چهارگزینه‌ای با ۶۰ سؤال برگزار می‌شود. داوطلبی موفق به اخذ مدرک خواهد شد که «حد نصاب» امتیاز او از آزمون لااقل ۵۰ درصد باشد. هر پاسخ غلط دارای $\frac{۱}{۳}$ نمرهٔ منفی است. اگر شما در این آزمون شرکت کرده باشید و بعد از تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤالات، تنها به ۲۹ سؤال پاسخ گفته باشید، چه می‌کنید؟ آیا دست روی دست می‌گذارید تا از آزمون مردود بیرون بیایید یا اینکه شانس خود را امتحان می‌کنید و به سؤالاتی به طور «شانسی» پاسخ می‌دهید؟

بعضی از افراد در پاسخ به این سؤال فوراً می‌گویند: خب هر پاسخ غلط $\frac{۱}{۳}$ نمره منفی دارد. اگر به سؤالی شانسی پاسخ دهیم، همان امتیازی که ممکن است با پاسخ‌گویی صحیح کسب کنیم با احتمال پاسخ‌گویی غلط خنثا می‌شود. پس در عمل وضعیت ما تفاوتی نخواهد کرد. این افراد فراموش می‌کنند، داوطلبی که در این آزمون به ۲۹ سؤال (یا کمتر) پاسخ گفته باشد، چیزی برای از دست دادن ندارد! (چون ۲۹ پاسخ صحیح او را به قبولی در آزمون نمی‌رساند.) آیا بهتر نیست به یک سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم؟ مسلماً بهتر است! چون در آن صورت به احتمال $\frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$ به سؤال پاسخ صحیح می‌دهیم و مدرک را کسب می‌کنیم، ولی با ۲۹ پاسخ صحیح به هیچ‌جا نمی‌رسیم![1]

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم: آیا بهتر نیست به دو سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم؟ ممکن است شما فوراً بگویید لابد بهتر است! بگذارید حساب کنیم. در این حالت اگر به یک سؤال صحیح و به یک سؤال غلط پاسخ دهیم، مجموعاً $۲۹+۱+(-\frac{۱}{۳}) = ۲۹\frac{۲}{۳}$ امتیاز کسب می‌کنیم که از ۳۰ امتیاز کمتر است. در حالتی موفق به قبولی در آزمون می‌شویم که به هر دو سؤال شانسی پاسخ صحیح بدهیم ($۳۰<۲+۲۹$) که احتمال آن برابر است با: $(\frac{۱}{۴})^۲ = ۰/۰۶۲۵$.
پس پاسخ گفتن شانسی به دو سؤال بهتر از پاسخ گفتن شانسی به یک سؤال نیست.

اگر به سه سؤال به‌طور شانسی پاسخ دهیم چه‌طور؟ اگر هر سه پاسخ ما صحیح باشد، در آزمون قبول می‌شویم ($۳۰<۳+۲۹$). اگر به دو سؤال صحیح و به یک سؤال غلط پاسخ دهیم، باز هم امتیاز لازم برای قبولی را کسب می‌کنیم ($۳۰ < (-\frac{۱}{۳}) + ۲ + ۲۹$). اما ترکیب‌های دو پاسخ غلط ـ یک پاسخ صحیح و سه پاسخ غلط ما را مردود می‌کند. پس احتمال قبولی ما در آزمون از مجموع احتمال دو ترکیب اول به‌دست می‌آید:

$$(۰/۲۵)^۳ + \binom{۳}{۲}(۰/۲۵)^۲(۰/۷۵)^۱ = ۰/۱۵۶۲۵ \qquad (۱)$$

در جملهٔ دوم عبارت فوق، قرار است از بین سه پاسخ، دو پاسخ

صحیح باشد. احتمال صحیح بودن هر پاسخ برابر ۰/۲۵ و احتمال غلط بودن آن برابر ۰/۷۵ است. انتخاب دو پاسخ از سه پاسخ مذکور $\binom{۳}{۲}$ حالت مختلف ایجاد می‌کند. در واقع صورت بهتر رابطهٔ ۱ به شکل زیر است:

$$\binom{۳}{۳}(۰/۲۵)^{۳}(۰/۷۵)^{۰}+\binom{۳}{۲}(۰/۲۵)^{۲}(۰/۷۵)^{۱}=۰/۱۵۶۲۵ \qquad (۲)$$

نتیجه آنکه پاسخ‌گویی شانسی به سه سؤال بهتر از پاسخ‌گویی شانسی به دو سؤال است، اما از پاسخ‌گویی شانسی به یک سؤال بهتر نیست.

قبل از حل مسئله به‌صورت کلی، یک مثال دیگر را به‌طور خاص حل می‌کنیم: احتمال قبولی داوطلب اگر به پنج سؤال شانسی پاسخ دهد چه‌قدر می‌شود؟ در جدول ۱ نشان داده شده است که احتمال آنکه پاسخ داوطلب به ۵، ۴، ...، ۰ سؤال صحیح باشد، چه‌قدر است (مجموع تمامی این احتمالات برابر ۱ است). اما احتمال قبولی داوطلب از جمع احتمال در وضعیت‌هایی به‌دست می‌آید که امتیاز لااقل ۳۰ را برای او کسب کند. (یعنی حالت‌های اول تا چهارم). می‌توان به ازای هر وضعیت، نشانگری دودویی تعریف کرد که در صورت کسب امتیاز حد نصاب (عدم کسب) برابر ۱ (۰) خواهد شد (در ستون ششم) و حاصل‌ضرب احتمال رخداد هر وضعیت در نشانگر وضعیت در ستون هفتم نشان داده شده است. حاصل جمع احتمال‌های نمایش داده شده در ستون هفتم برابر کل احتمال قبولی داوطلب است. (این احتمال برابر ۰/۳۶۷۱۹ خواهد شد.)

اگر داوطلب به سؤالات بیشتری به‌طور شانسی پاسخ دهد، آیا می‌توانیم بگوییم احتمال قبولی‌اش بیشتر و بیشتر می‌شود؟ آیا تعداد سؤالی وجود دارد که اگر به آن تعداد پاسخ دهد، احتمال قبولی‌اش ماکزیمم می‌شود؟ (در این صورت بعد از آنکه داوطلبان تلاش خود را برای پاسخ‌گویی به سؤالات کردند، می‌توانند تصمیم بگیرند که به چند سؤال به‌طور شانسی پاسخ درست گویند تا بیشترین احتمال قبولی را داشته باشند.)

بیایید مسئله را به‌صورت کلی مطرح کنیم. فرض کنیم داوطلبی بعد از تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤالات، با حل کردن آن‌ها (بگوییم به‌صورت تحلیلی) به $k_۱$ سؤال ($۰\le k_۱\le ۳۰$) پاسخ درست گفته است. می‌خواهیم احتمال آن را به‌دست آوریم که داوطلب با پاسخ‌گویی شانسی به $k_۲$ سؤال دیگر حد نصاب قبولی را به‌دست آورد ($۱\le k_۲\le ۶۰-k_۱$). مشابه با مثال‌های حل‌شده ممکن است از بین این پاسخ‌ها، i پاسخ صحیح و $k_۲-i$ پاسخ غلط باشد. ($i=۱,۲,...,k_۲$). باید مجموع احتمال وضعیت‌هایی محاسبه شوند که قبولی را برای داوطلب رقم می‌زنند. این مطلب در رابطهٔ زیر خلاصه شده است:

$$P(k_۱,k_۲)=\sum_{i=۰}^{k_۲}\binom{k_۲}{i}(۰/۲۵)^{i}(۰/۷۵)^{k_۲-i}.f(k_۱,k_۲,i) \qquad (۳)$$

در این رابطه، $P(k_۱,k_۲)$ احتمال مطلوب و $f(k_۱,k_۲,i)$ نشانگری دودویی است. این نشانگر در وضعیتی که نمرهٔ کسب‌شده توسط داوطلب بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰ باشد، برابر ۱ و در غیر این صورت

جدول ۱. محاسبهٔ احتمال قبولی داوطلب با پنج پاسخ شانسی

احتمال قبولی و رخداد وضعیت	نشانگر وضعیت	احتمال رخداد وضعیت	وضعیت	امتیاز	تعداد پاسخ	
					غلط	صحیح
۰/۰۰۰۹۸	۱	$\binom{۵}{۵}(۰/۲۵)^{۵}(۰/۷۵)^{۰}=۰/۰۰۰۹۸$	قبول	$۲۹+۵+(-\frac{۰}{۳})=۳۴$	۰	۵
۰/۰۱۴۶۵	۱	$\binom{۵}{۴}(۰/۲۵)^{۴}(۰/۷۵)^{۱}=۰/۰۱۴۶۵$	قبول	$۲۹+۴+(-\frac{۱}{۳})=۳۲\frac{۲}{۳}$	۱	۴
۰/۰۸۷۸۹	۱	$\binom{۵}{۳}(۰/۲۵)^{۳}(۰/۷۵)^{۲}=۰/۰۸۷۸۹$	قبول	$۲۹+۳+(-\frac{۲}{۳})=۳۱\frac{۱}{۳}$	۲	۳
۰/۲۶۳۶۷	۱	$\binom{۵}{۲}(۰/۲۵)^{۲}(۰/۷۵)^{۳}=۰/۲۶۳۶۷$	قبول	$۲۹+۲+(-\frac{۳}{۳})=۳۰$	۳	۲
۰	۰	$\binom{۵}{۱}(۰/۲۵)^{۱}(۰/۷۵)^{۴}=۰/۳۹۵۵۱$	مردود	$۲۹+۱+(-\frac{۴}{۳})=۲۸\frac{۲}{۳}$	۴	۱
۰	۰	$\binom{۵}{۰}(۰/۲۵)^{۰}(۰/۷۵)^{۵}=۰/۲۳۷۳۰$	مردود	$۲۹+۰+(-\frac{۵}{۳})=۲۷\frac{۱}{۳}$	۵	۰

برابر صفر است:

$$f(k_1,k_2,i)=\begin{cases}1 & k_1+i-\frac{1}{3}\times(k_2-i)\geq 30\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\quad(4)$$

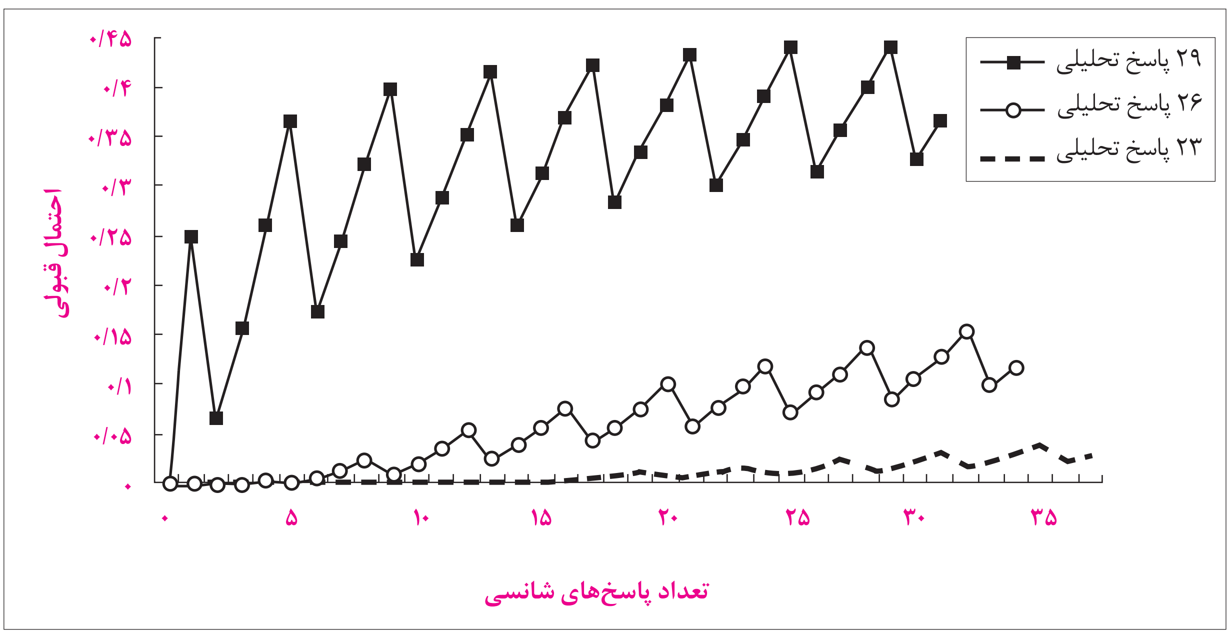
محاسبهٔ P از رابطهٔ فوق با یک برنامه‌نویسی رایانه‌ای نه‌چندان پیچیده قابل اجراست. با اجرای این برنامه می‌توانید به سادگی P را به ازای مقادیر مختلف k_1 و k_2 محاسبه کنید. از خروجی‌های این برنامه نتایج زیر قابل برداشت‌اند:

۱. در نمودار، منحنی تغییرات احتمال موفقیت داوطلبی که به ۲۹ و ۲۶ سؤال به‌صورت تحلیلی پاسخ گفته باشد، در ازای تغییرات پاسخ‌های شانسی رسم شده است. روند تغییرات صعود منحنی یک‌نوا نبوده و به‌صورت دندان اره‌ای است. به‌علاوه، هر منحنی دارای یک ماکزی‌مم مطلق است. مثلاً می‌توانیم بگوییم در صورتی که داوطلب به ۲۶ سؤال به صورت تحلیلی پاسخ گفته باشد، شانس قبولی‌اش وقتی ماکزی‌مم می‌شود که به سؤالات باقی‌مانده، ۳۲ پاسخ شانسی بدهد.

۲. نکتهٔ جالب‌تر اینکه هر یک از دندان‌های اره‌ای منحنی شامل چهار سؤال شانسی است (احتمالاً به‌دلیل چهارگزینه‌ای بودن آزمون). می‌توانید مسئله را برای آزمون‌های ۵ گزینه‌ای با نمرهٔ $-\frac{1}{4}$ برای هر پاسخ غلط تکرار کنید و ببینید در منحنی متناظر، تعداد سؤالات موجود در هر یک از دندان‌های اره‌ای برابر ۵ سؤال می‌شود یا نه؟!

۳. متأسفانه یا خوش‌بختانه، احتمال قبولی داوطلبان با پاسخ‌گویی شانسی به سؤالات چندان زیاد نیست. در بهترین حالت که داوطلب به ۲۹ سؤال، تحلیلی و ۲۹ سؤال، شانسی پاسخ گفته باشد، شانس قبولی‌اش برابر ۰/۴۴۳۲ است. (که زیر ۵۰ درصد است!)

۴. همهٔ نتیجه‌گیری‌های فوق در حالتی درست‌اند که فرض کنیم تمامی پاسخ‌های تحلیلی داوطلب درست باشند. این در حالی است که عملاً چنین نیست. همهٔ شما این تجربه را داشته‌اید که در آزمون‌های چهارگزینه‌ای تعدادی از پاسخ‌هایتان به‌دلیل اشتباه محاسبات و... غلط از آب درمی‌آید! اهمیت این مطلب از آن جهت است که نقاط ماکزی‌مم نسبی منحنی‌های احتمال قبولی (مانند نمودار ۱) دارای دره‌هایی در هر دو طرف خود هستند. چه‌بسا اگر از احتمال غلط بودن برخی پاسخ‌های تحلیلی‌تان صرف‌نظر کنید، در یکی از دره‌ها می‌افتید و احتمال قبولی‌تان شدیداً کاهش می‌یابد!



نمودار ۱. احتمال قبولی داوطلب با تعداد پاسخ‌های شانسی متفاوت

پی نوشت

۱. دقت کنید، در این سؤال یک آزمون چهار گزینه‌ای با حد نصاب قبولی ۵۰ درصد مطرح است. نتیجه‌گیری‌های طرح شده در این مقاله برای آزمون‌های چهارگزینه‌ای که در آن داوطلبان با تراز با یکدیگر مقایسه می‌شوند، معتبر نیست. در آزمون‌های چهارگزینه‌ای با تراز، هر پاسخ غلط موقعیت شما را نسبت به داوطلبان دیگر تضعیف می‌کند.